

Лекция 5. Полные дифференциальные уравнения. ДУ второго порядка. Теорема Коши

- Тлеулесова Айгерим Мекемтасовна

Цель лекции

- ▶ • Изучить критерий полноты (точности) ДУ первого порядка
- ▶ • Освоить методы решения полных дифференциальных уравнений
- ▶ • Понять структуру ДУ второго порядка
- ▶ • Разобрать теорему Коши о существовании и единственности решения

Основные вопросы

- ▶ Полные (точные) дифференциальные уравнения
- ▶ Метод решения полных ДУ
- ▶ Уравнения второго порядка
- ▶ Сведение к системе первого порядка
- ▶ Теорема Коши

Полные дифференциальные уравнения

Уравнение

$$P(x; y) dx + Q(x; y) dy = 0 \quad (1)$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть есть полный дифференциал некоторой функции $u(x; y)$, т. е.

$$P(x; y) dx + Q(x; y) dy = du(x; y).$$

В этом случае ДУ (1) можно записать в виде $du(x; y) = 0$, а его общий интеграл будет:

$$u(x; y) = c. \quad (2)$$

Теорема . Для того чтобы выражение $\Delta = P(x; y) dx + Q(x; y) dy$, где функции $P(x; y)$ и $Q(x; y)$ и их частные производные

$\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в некоторой области D плоскости Oxy ,

было полным дифференциалом, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (3)$$

Метод решения полных ДУ

- ▶ Проверить критерий $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$
- ▶ Найти $u(x, y)$: $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y)$ и $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$
- ▶ Записать общее решение $u(x, y) = C$

Решить: $(2xy+3)dx + (x^2 + 4y)dy = 0$

1) Проверка полноты:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x, \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x \rightarrow \text{уравнение полное}$$

2) Интегрируем P по x :

$$u = x^2y + 3x + \varphi(y)$$

3) Находим $\varphi(y)$: $\varphi'(y) = 4y \rightarrow \varphi = 2y^2$

Ответ: $x^2y + 3x + 2y^2 = C$

Дифференциальные уравнения второго порядка

- ▶ Общий вид: $F(x, y, y', y'') = 0$
- ▶ Или: $y'' = f(x, y, y')$
- ▶ Общее решение содержит 2 константы

Понижение порядка

- 1) $y'' = f(x)$
- 2) $y'' = f(y')$ — замена $y' = z(x)$
- 3) $y'' = f(y)$ — замена $y' = z(y)$

Контрольные вопросы

- ▶ • Когда ДУ является полным?
- ▶ • Общий вид ДУ второго порядка
- ▶ • Что такое общее решение второго порядка?
- ▶ • Как понижается порядок ДУ?

Рекомендуемая литература

- ▶ Қасымов Қ., Қасымов Ә. Жоғары математика курсы. Алматы, Санат, 1994
- ▶ 2. Дүйсек А.К., қасымбеков С.Қ. Жоғары математика. Алматы, ҚБТУ, 2004
- ▶ 3. Айдос Е.Ж. Жоғары математика (қысқаша курс). Алматы, Иль-Тех-Кітап, 2003
- ▶ 4. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики - М.: «Наука». - 1989. - 656 с.
- ▶ 5. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа, ч.1, М: «Наука». - 1982.
- ▶ 6. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия М: «Наука». - 1991.
- ▶ 7. Шипачев В.С. Высшая математика